Solution à forme produit d'un systeme linéaire

Jean Pellaumail

CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 259

SOLUTION À FORME PRODUIT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

Jean PELLAUMAIL

Décembre 1983

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

SOLUTION A FORME PRODUIT D'UN SYSTEME LINEAIRE

par

J. PELLAUMAIL

Publication Interne n° 212
Novembre 1983
36 pages

RESUME

On donne des conditions suffisantes pour qu'un système d'équations linéaires admette une solution "à forme produit". Le théorème ainsi établi généralise les théorèmes connus relatifs aux probabilités stationnaires d'un réseau de file d'attente, notamment le théorème B.C.M.P..

ABSTRACT

The existence of a " product form" solution for some system of linear equations is stated. This result generalizes the previous theorems on " product form" steady states probabilities in queueing networks, specially B.C.M.P. theorem.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L.A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 · I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

0 - INTRODUCTION

L'étude des files d'attente a pris une considérable extension dans les dix dernières années : d'une part, les besoins des utilisateurs se font de plus en plus pressants ; d'autre part des formules, ou des algorithmes autrefois inutilisables sont devenus exploitables avec les moyens de calcul modernes.

Une partie de cette théorie est la recherche de conditions suffisantes pour que la probabilité stationnaire d'un réseau de files d'attente ait une forme explicitement calculable (cf. [Jac], [BCMP], [CHT], [Bre], [GeP], [Len], [Pel], [Pit], etc...).

Du point de vue mathématique, ceci revient essentiellement à déterminer des conditions suffisantes pour qu'un système d'équations linéaires ait une solution explicite.

A notre avis, cette recherche de solution exacte reste une partie fondamentale de la théorie. D'une part le domaine où l'on sait déterminer une telle solution s'est considérablement élargi : il y a donc de plus en plus d'exemples concrets pour lesquels on sache déterminer, au moins en première approximation, la solution stationnaire. D'autre part, lorsque la formalisation sous forme d'un réseau de files d'attente est nécessaire, il est très difficile, voire impossible, d'espérer obtenir la solution stationnaire par simulation avec une approximation donnée. Enfin, seule une solution exacte peut permettre la recherche d'optimum.

Le point essentiel de ce papier est d'établir un théorème qui contient tous les résultats classiques dans ce domaine. Le plan adopté est le suivant :

1 - Théorème fondamental
2 - Exemples de couples (r,f)
3 - Réseaux de files d'attente
4 - Exemples de sous-réseaux échangeables
5 - Réseaux avec blocage.

1 - THEOREME FONDAMENTAL

Soit J et K deux ensembles finis et $(E_j)_{j\in J}$ une famille, indexée par J, d'ensembles finis ou dénombrables. On pose :

$$n := \mathrm{card}(K) \quad \text{et} \quad E(j) := E_j$$

$$E := \prod_{j\in J} E_j \quad \text{(produit ensembliste)}$$

$\mathcal{P} := (\mathbb{R}^+)^E$:= ensemble des applications définies sur E et à valeurs positives

$\mathcal{G} := (\mathbb{R}^+)^{E\times E}$:= ensemble des applications définies sur $(E\times E)$ et à valeurs positives.

On définit de même $\mathcal{P}_j$ et $\mathcal{G}_j$ pour tout élément j de J.

On se donne

a) un élément f de $\mathcal{P}$;

b) pour tout élément j de J, un élément (t_j,p_j) de $(\mathcal{G}_j\times\mathcal{P}_j)$;

c) pour tout élément (j,k) de $(J\times K)$, deux éléments $a_{j,k}$ et $d_{j,k}$ de $\mathcal{G}_j$ et un élément $b_{j,k}$ de $\mathcal{P}_j$;

d) pour tout élément (i,j,h,k) de $(J\times J\times K\times K)$, un élément $r_{i,j,h,k}$ de $\mathcal{G}$ tel que $r_{i,j,h,k} = 0$ si $i=j$.

Pour tout élément j de J, on pose

$$g_j := t_j + \sum_{k\in K} (d_{j,k} + a_{j,k})$$

On suppose que, quel que soit j élément de J, on a :

$(i)_j$ quel que soit (e_j,k) élément de $(E_j\times K)$

$$\sum_{u\in E(j)} a_{j,k}(e_j,u) = 1$$

$(ii)_j$ quel que soit (e_j,k) élément de $(E_j\times K)$ tel que $p_j(e_J) \neq 0$, on a :

$$\sum_{v\in E(j)} p_j(v)\, d_{j,k}(v,e_j) = p_j(e_j)\, b_{j,k}(e_j)$$

$(iii)_j$ quel que soit e_j élément de E_j

$$\sum_{u\in E(j)} p_j(u)\, g_j(u,e_j) = p_j(e_j) \sum_{u\in E(j)} g_j(e_j,u)$$

Si $p_j(e_j) = 0$, pour tout élément k de K, on pose $b_{j,k}(e_j) := 0$.

Pour tout élément (i,j,h,k) de (J×J×K×K), avec i≠j, soit F(i,j,h,k) l'ensemble des éléments (e,e') de (E×E) tels que $d_{i,h}(e_i,e'_i)a_{j,k}(e_j,e'_j) \neq 0$ et $e_x = e'_x$ pour $(x-i)(x-j) \neq 0$.

On suppose que f et r satisfont aux propriétés d'invariance suivantes :

(iv) $e_j = e'_j$ pour $j \neq i$ et $t_i(e_i,e'_i) \neq 0$ impliquent $f(e) = f(e')$

(v) (e,e') et (e,e") éléments de F(i,j,h,k) et $e'_i = e''_i = u$ impliquent $r_{i,j,h,k}(e,e') = r_{i,j,h,k}(e,e'')$.
On notera $\rho_{i,j,h,k}(e,u)$ cette quantité.

(vi) (e',e) et (e",e) éléments de F(i,j,h,k) et $e'_j = e''_j = u$ impliquent $f(e')r_{i,j,h,k}(e',e) = f(e'')r_{i,j,h,k}(e'',e)$.
On notera $\rho'_{i,j,h,k}(u,e)$ cette quantité.

Pour tout élément (i,h) de (J×K), soit F'(i,h) l'ensemble des éléments (e,u) de $(E \times E_i)$ tels que

$$d_{i,h}(e_i,u) \neq 0$$

On suppose que, quel que soit (i,h) élément de (J×K), on a :

(vii) quel que soit (e,u) élément de F'(i,h)

$$\sum_{j,k} \rho_{i,j,h,k}(e,u) = 1$$

De façon analogue, pour tout élément (i,h) de (J×K), soit F"(i,h) l'ensemble des éléments (u,e) de $(E_i \times E)$ tels que

$$a_{i,h}(u,e_i) \prod_{j \in J} p_j(e_j) \neq 0$$

On suppose que, quel que soit (i,h) élément de (J×K), on a :

(viii) quel que soit (u,e) élément de F"(i,h)

$$\sum_{j,k} \rho'_{j,i,k,h}(u,e)\, b_{j,k}(e_j) = f(e)$$

Enfin, on suppose que, pour tout élément i de J et tout élément e_i de E(i), on a :

(ix) $$\sum_{h \in K} b_{i,h}(e_i) = n$$

Soit p l'élément de $\mathcal{P}$ défini par,

quel que soit $e := (e_j)_{j \in J}$

$$p(e) := f(e) \prod_{j \in J} p_j(e_j)$$

Pour tout élément (e,e') de (E×E), on pose :

$\delta_i(e,e') = 0$ si il existe $j \neq i$ tel que $e_j \neq e'_j$

$\delta_i(e,e') = 1$ sinon.

$\delta'_{i,j}(e,e') = 0$ si il existe x avec $(x-i)(x-j) \neq 0$ et $e_x \neq e'_x$

$\delta'_{i,j}(e,e') = 1$ sinon.

Soit g l'élément de $\mathcal{G}$ défini, pour $e := (e_j)_{j \in J}$ et $e' := (e'_j)_{j \in J}$ par :

$$g(e,e') := \sum_{j \in J} t_j(e_j,e'_j)\,\delta_j(e,e') + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{h \in K} \sum_{k \in K} d_{i,h}(e_i,e'_i)\,a_{j,k}(e_j,e'_j)\, r_{i,j,h,k}(e,e')\,\delta'_{i,j}(e,e')$$

On a alors :

(x) quel que soit e élément de E

$$p(e) \sum_{w \in E} g(e,w) = \sum_{w \in E} p(w)g(w,e)$$

On suppose, de plus, qu'il existe un élément 0 de J tel que :

(xi) $t_o = 0$

(xii) pour tout élément (e,k) de (E×K) tel que $p(e) \neq 0$, on a :

$$\sum_{u \in E(o)} d_{o,k}(e_o,u) = 1$$

(xiii) si (e,e') et (e,e") sont deux éléments de F(o,j,h,k), on a

$$r_{o,j,h,k}(e,e') = r_{o,j,h,k}(e,e'')$$

On notera $\rho''_{o,j,h,k}(e)$ ce terme.

On pose alors :

$$\overline{J} := J \setminus \{o\}$$

$$\overline{t}(e,e') := \sum_{i\in\overline{J}} \sum_{h\in K} \sum_{j\in\overline{J}} \sum_{k\in K}$$

$$[\delta'_{i,j}\ r_{i,j,h,k}](e,e')\ d_{i,h}(e_i,e'_i)a_{j,k}(e_j,e'_j) + \sum_{i\in\overline{J}} t_i(e_i,e'_i)\delta_i(e,e')$$

$$\overline{a}_k(e,e') := \sum_{j\in\overline{J}} \sum_{h\in K} [\delta'_{o,j}\ r_{o,j,k,h}](e,e')d_{o,k}(e_o,e'_o)a_{j,h}(e_j,e'_j)$$

$$\overline{d}_k(e',e) := \sum_{j\in\overline{J}} \sum_{h\in K} [\delta'_{j,o}\ r_{j,o,h,k}]\ (e',e)a_{o,k}(e'_o,e_o)d_{j,h}(e'_j,e_j)$$

$$\overline{p}(e) := p(e),\ \overline{g}(e) := g(e) \text{ et } \overline{E} := E$$

et, pour tout élément (e,k) de $(E\times K)$ tel que $p(e) \neq 0$,

$(\overline{ii})$ $$\overline{b}_k(e) := \{ \sum_{v\in E} \overline{p}(v)\ \overline{d}_k(v,e)\} \ /\ \overline{p}(e)$$

On a alors les propriétés suivantes :

$(\overline{0})$ $$\overline{g} = \overline{t} + \sum_{k\in K} (\overline{d}_k + \overline{a}_k)$$

$(\overline{i})$ quel que soit (e,k) élément de $(\overline{E}\times K)$,

$$\sum_{u\in E} \overline{a}_k(e,u) = 1$$

$(\overline{iii})$ quel que soit e élément de $\overline{E}$

$$\sum_{u\in E} \overline{p}(u)\ \overline{g}(u,e) = \overline{p}(e) \sum_{u\in E} \overline{g}(e,u)$$

$(\overline{ix})$ pour tout élément e de $\overline{E}$ tel que $\overline{p}(e) \neq 0$

$$\sum_{k\in K} \overline{b}_k(e) = n$$

Relativement à $(\overline{E},\overline{p},\overline{g},\ldots)$ on a donc les propriétés $(\overline{i})$, $(\overline{ii})$, $(\overline{iii})$ et $(\overline{ix})$ qui correspondent exactement aux propriétés $(i)_j$, $(ii)_j$, $(iii)_j$ et (ix) relativement à $(E_j,p_j,g_j,\ldots)$. On peut donc, éventuellement, faire le "produit" d'ensembles tels que $(\overline{E},\overline{p},\ldots)$ comme on a fait le "produit" des $(E_i,p_i,\ldots)$. Autrement dit, on peut <u>itérer</u> le procédé.

<u>PREUVE</u> :

Effectuons deux remarques préliminaires concernant les relations (vii) et (viii).

Soit (e,u) élément de $F'(i,h)$; soit (j,k) élément de $(J\times K)$ avec $j\neq i$; la relation $(i)_j$ implique qu'il existe v élément de E_j tel que $a_{j,k}(e_j,v) \neq 0$; soit e' l'élément de E défini par $e'_i := u$, $e'_j := v$ et, pour $(x-i)(x-j) \neq 0$, $e'_x := e_x$; (e,e') appartient à $F(i,j,h,k)$ et $\rho_{i,j,h,k}(e,u)$ est bien défini.

De même, soit (u,e) élément de $F''(i,h)$; soit (j,k) élément de $(J\times K)$ tel que $i\neq j$ et $b_{j,k}(e_j) \neq 0$; la relation $(ii)_j$ implique qu'il existe v élément de E_j tel que $d_{j,k}(v,e_j) \neq 0$; soit e' l'élément de E défini comme ci-dessus ; (e',e) appartient à $F(j,i,k,h)$ et $\rho'_{j,i,k,h}(u,e)$ est bien défini.

On fixe $e := (e_j)_{j\in J}$ et on pose

$$q_{i,j} := \prod_{k\neq i,k\neq j} p_k(e_k) \quad \text{et} \quad s_i := q_{i,j}\, p_j(e_j)$$

D'une part, quel que soit i élément de J, on pose :

$$\alpha_i := p(e) \sum_{u\in E(i)} t_i(e_i,u)$$

$$\beta_i := p(e) \sum_{h\in K} \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} d_{i,h}(e_i,u)a_{j,k}(e_j,v)r_{i,j,h,k}[e,e'(u,v)]$$

où $e'(u,v)$ est défini par :

$$e'_i := u \ , \ e'_j := v \text{ et, si } (k-i)(k-j) \neq 0, \ e'_k := e_k$$

Dans cette sommation, $r_{i,j,h,k}[e,e'(u,v)]$ est indépendant de v (pour i, j, h et k fixés) compte tenu de (v). On peut donc effectuer "à part" la sommation sur v ce qui permet d'utiliser la propriété $(i)_j$; on obtient donc :

$$\beta_i = p(e) \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} d_{i,h}(e_i,u)\rho_{i,j,h,k}(e,u)$$

Le terme $d_{i,h}(e_i,u)$ ne dépend ni de j, ni de k ; on peut donc utiliser la relation (vii) (on effectue "à part" les sommations sur j et k). On obtient donc :

$$\beta_i = p(e) \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(i)} d_{i,h}(e_i,u)$$

Compte tenu de la définition de g_i , on a :

$$\alpha_i + \beta_i = p(e) \sum_{u\in E(i)} \{g_i(e_i,u) - \sum_{h\in K} a_{i,h}(e_i,u)\}$$

enfin, en utilisant $(i)_i$, il vient :

$$\alpha_i + \beta_i = p(e)\{ \sum_{u\in E(i)} g_i(e_i,u) - n \}$$

D'autre part, quel que soit i élément de J, on pose :

$$\lambda_i := s_i \sum_{u\in E(i)} p_i(u)t_i(u,e_i)f[e''(u)]$$

où $e''(u)$ est défini par $e''_i := u$ et, si $i\neq j$, $e''_j := e_j$

$$\mu_i := q_{i,j} \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} p_i(u)p_j(v)d_{j,k}(v,e_j)a_{i,h}(u,e_i)$$
$$f[e'(u,v)]\ r_{j,i,k,h}[e'(u,v),e]$$

où $e'(u,v)$ est défini par $e'_i := u$, $e'_j := v$ et $e'_x := e_x$ pour $(x-i)(x-j) \neq 0$.

Dans cette sommation, $f[e'(u,v)]\ r_{j,i,k,h}[e'(u,v),e]$ est indépendant de v (pour j, i, k et h fixés) compte tenu de (vi) ; on peut donc effectuer "à part" la sommation sur v, ce qui permet d'utiliser la relation $(ii)_j$; on obtient donc, en étudiant à part le cas $p_j(e_j) = 0$ (cf. $(iii)_j$) :

$$\mu_i = s_i \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} p_i(u)a_{i,h}(u,e_i)\rho'_{j,i,k,h}(u,e)b_{j,k}(e_j)$$

Le terme $p_i(u)a_{i,h}(u,e_i)$ ne dépend ni de j ni de k ; on peut donc le "sortir" de la sommation sur j et k ; si on effectue "à part" cette sommation sur j et k , on peut utiliser la relation (viii) et on obtient

$$\mu_i = s_i\ f(e) \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(i)} p_i(u)a_{i,h}(u,e_i)$$

La condition d'invariance (iv) implique :

$$\lambda_i = s_i\ f(e) \sum_{u\in E(i)} p_i(u)t_i(u,e_i)$$

La définition de g_i donne alors :

$$\lambda_i + \mu_i = s_i\ f(e) \sum_{u\in E(i)} p_i(u)\{g_i(u,e_i) - \sum_{h\in K} d_{i,h}(u,e_i)\}$$

soit, compte tenu de $(ii)_i$:

$$\lambda_i + \mu_i = s_i\ f(e)\{ \sum_{u\in E(i)} p_i(u)g_i(u,e_i) - p_i(e_i) \sum_{h\in K} b_{i,h}(e_i)\}$$

Finalement, les relations $(iii)_i$ et (ix) impliquent

$$\alpha_i + \beta_i = \lambda_i + \mu_i$$

ce qui implique la relation (x) par sommation sur i.

On étudie maintenant $(E, \overline{p}, \overline{g},\ldots)$. On pose :

$$\overline{\alpha}_k := \sum_{u\in E} \overline{a}_k(e,u)$$

Par définition de $\overline{a}_k$ et compte tenu de (xiii), on a :

$$\overline{\alpha}_k = \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(o)} \sum_{v\in E(f)} \rho''_{o,j,k,h}(e)\ d_{o,k}(e_o,u)a_{j,h}(e_j,v)$$

Le terme ρ'' d ne dépendant pas de v, on peut effectuer "à part" la sommation sur v et utiliser $(i)_j$ ce qui donne :

$$\overline{\alpha}_k = \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(o)} \rho''_{o,j,k,h}(e)\ d_{o,k}(e_o,u)$$

Le terme ρ'' ne dépendant pas de u, on peut effectuer "à part" la sommation sur u et utiliser (xii), ce qui donne

$$\overline{\alpha}_k = \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \rho''_{o,j,k,h}(e)$$

soit $\overline{\alpha}_k = 1$ d'après (vii)

ce qui prouve $(\overline{i})$.

La relation $(\overline{o})$ résulte immédiatement des définitions. La relation $(\overline{iii})$ est identique à (x). Posons :

$$\overline{\mu} := \overline{p}(e) \sum_{k\in K} \overline{b}_k(e)$$

Compte tenu de la définition de $\overline{b}_k$, on a :

$$\overline{\mu} = \sum_{k\in K} \sum_{w\in E} \overline{p}(w)\, \overline{d}_k(w,e)$$

$$= \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(o)} \sum_{v\in E(j)} r_{j,o,h,k}[e'(u,v),e]\; a_{o,k}(u,e_o) d_{j,h}(v,e_j)\; \overline{p}[e'(u,v)]$$

avec $e'(u,v) := e'$ défini par $e'_o := u$

$e'_j := v$ et $e'_x := e_x$ pour $(x-o)(x-j) \neq 0$

On a donc, par définition de μ_o , $\overline{\mu} = \mu_o$

d'où $\overline{\mu} = \mu_o + \lambda_o$ (cf. (xi))

$\overline{\mu} = \alpha_o + \beta_o$ (1ère partie de la preuve)

$\overline{\mu} = \beta_o$ (cf. (xi))

soit,

$$\overline{\mu} = \overline{p}(e) \sum_{h\in K} \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} \sum_{u\in E(o)} \sum_{v\in E(j)} d_{o,h}(e_o,u) a_{j,k}(e_j,v) r_{o,j,h,k}[e,e'(u,v)]$$

où $e' := e'(u,v)$ est défini comme ci-dessus.

Compte tenu de (viii), seul le terme $a_{j,k}(e_j,v)$ dépend effectivement de v ; on peut donc utiliser $(i)_j$ ce qui donne

$$\overline{\mu} = \overline{p}(e) \sum_{h\in K} \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} \sum_{u\in E(o)} d_{o,h}(e_o,u) \rho''_{o,j,h,k}(e)$$

Or, le terme $d_{o,h}(e_o,u)$ ne dépend pas de j et k ; on peut donc effectuer "à part" la sommation sur j et k et utiliser (vii) ce qui donne

$$\overline{\mu} = \overline{p}(e) \sum_{h\in K} \sum_{u\in E(o)} d_{o,h}(e_o,u)$$

$$= n\, \overline{p}(e) \qquad \text{(cf. (xii))}$$

ce qui est la relation $(\overline{ix})$.

2 - EXEMPLES DE COUPLES (r,f)

Nous allons maintenant donner quelques exemples de couples (r,f) : l'interprétation "physique" de tels routages sera donnée ultérieurement.

2.1 - EXEMPLE 1 : ROUTAGES "FIXES"

On considère le cadre du théorème fondamental. De plus, pour tout élément j de J, on suppose qu'il existe une application, définie sur E_j, à valeurs dans $\mathbb{Z}^K$, qui à e_j élément de E_j associe $\hat{e}_j := (\hat{e}_{j,k})_{k\in K}$ élément de $\mathbb{Z}^K$.

On suppose que, pour tout élément (j,k) de (J×K) et pour tout élément (e_j,e'_j) de $(E_j\times E_j)$ tel que $\left[\hat{e}'_{j,k}-\hat{e}_{j,k}+1\right]\prod_{m\neq k}(\hat{e}'_{j,m}-\hat{e}_{j,m})\neq 0$, on a

$$d_{j,k}(e_j,e'_j)=0$$

De même, pour tout élément (j,k) de (J×K) et pour tout élément (e_j,e'_j) de $(E_j\times E_j)$ tel que $\left[\hat{e}'_{j,k}-\hat{e}_{j,k}-1\right]\prod_{m\neq k}(\hat{e}'_{j,m}-\hat{e}_{j,m})\neq 0$, on suppose qu'on a :

$$a_{j,k}(e_j,e'_j)=0$$

Soit $(\rho_{i,j,h,k})_{(i,j,h,k)\in(J\times J\times K\times K)}$ une famille de réels positifs telle que, quels que soient i et h, $\sum_{j,k}\rho_{i,j,h,k}=1$.

On définit alors les routages r de la façon suivante ; pour tout couple (e,e') d'éléments de E :

- ou bien il existe (i,j,h,k) avec i≠j tels que $\hat{e}'_{i,h}:=\hat{e}_{i,h}-1$, $\hat{e}'_{j,k}:=\hat{e}_{j,k}+1$ et $\hat{e}'_{x,y}:=\hat{e}_{x,y}$ pour $(|x-i|+|y-h|)(|x-j|+|y-k|)\neq 0$

  et alors $r_{i,j,h,k}(e,e')=\rho_{i,j,h,k}$

- ou bien il n'existe pas de tel quadruplet (i,j,h,k) et $r_{i,j,h,k}(e,e')=0$.

Soit $(x_{i,h})_{(i,h)\in(J\times K)}$ une solution positive du système suivant :

$$(\eta) \qquad x_{i,h} = \sum_{j,k} x_{j,k}\, \rho_{j,i,k,h}$$

On sait qu'une telle solution non identiquement nulle existe (théorème ergodique élémentaire) ; en général cette solution n'est pas unique.

Soit E' une partie de E telle que, si e appartient à E' et si e' appartient à (E\E'), alors $r_{i,j,h,k}(e,e') = 0$ (quels que soient i, j, h et k). On peut évidemment prendre E' = E.

Enfin, soit f l'application définie sur E par :

si e appartient à (E\E'),

$$f(e) := 0$$

si e appartient à E',

$$f(e) := \prod_{j\in J} \prod_{k\in K} \{(x_{j,k})^{\hat{e}(j,k)}\}$$

On vérifie alors que les conditions (v), (vi), (vii) et (viii) du théorème fondamental sont satisfaites en prenant $b_{j,k}(e_j) = 1$ (quels que soient j, k et e_j).

<u>Vérification</u>

1°) condition (v)

Si (e,e') appartient à F(i,j,h,k), $\hat{e}'_{i,h} = \hat{e}_{i,h} - 1$ et $\hat{e}'_{j,k} = \hat{e}_{j,k} + 1$ et $e_x = e'_x$ pour $(x-i)(x-j) \neq 0$. On a donc

$$r_{i,j,h,k}(e,e') = \rho_{i,j,h,k}$$

ce qui implique (v).

2°) condition (vi)

On vient de voir que, si (e',e) appartient à F(i,j,h,k), alors

$$r_{i,j,h,k}(e',e) = \rho_{i,j,h,k}$$

Par ailleurs, f(e') ne dépend de e' que par l'intermédiaire de ê' ;

$$\rho'_{i,j,h,k}(u,e) = \rho_{i,j,h,k}\ f(\hat{e})\left[f(\hat{e}')/f(\hat{e})\right]$$

$$= \rho_{i,j,h,k}\ f(\hat{e})\left[x_{i,h}/x_{j,k}\right]$$

ce qui prouve (vi).

3°) condition (vii)

Si (e,u) appartient à $F'(i,h)$ (cf. 1°)),

$$\rho_{i,j,h,k}(e,u) = \rho_{i,j,h,k}$$

ce qui implique (vii).

4°) condition (viii) avec $b_{j,k}(e_j) = 1$.

Si (u,e) appartient à $F''(i,h)$ (cf. 2°)),

$$\rho'_{j,i,k,h}(u,e) = \rho_{j,i,k,h}\ f(\hat{e})\left[x_{j,k}/x_{i,h}\right]$$

La condition (viii) devient donc exactement la condition (η).

2.2 - EXEMPLE 2

Cet exemple généralise un exemple donné en [GrP] et repris dans [Len] avec plusieurs classes de clients (cf. 5.4 in fine).

On considère le cadre du théorème fondamental. De plus, on suppose que $J = J' \cup \{0\}$ (avec 0 non élément de J'), que $E_0 := \{0\}$ (ensemble réduit à un point et que, quel que soit h élément de K, $a_{o,h}(o,o) := d_h(o,o) := 1$. Pour tout élément j de J', on suppose qu'il existe une application, définie sur E_j, à valeurs dans $\mathbb{N}^K$, qui, à e_j élément de E_j, associe

$$\hat{e}_j := (\hat{e}_{j,k})_{k\in K} \text{ élément de } \mathbb{N}^K .$$

Comme dans l'exemple 1, on suppose que, pour tout élément (j,k) de $(J'\times K)$, $d_{j,k}(e_j,e'_j) \neq 0$ implique $\hat{e}'_{j,k} = \hat{e}_{j,k} - 1$ et $\hat{e}'_{j,m} = \hat{e}_{j,m}$ pour $m\neq k$ et que $a_{j,k}(e_j,e'_j) \neq 0$ implique $\hat{e}'_{j,k} = \hat{e}_{j,k} + 1$ et $\hat{e}'_{j,m} = \hat{e}_{j,m}$ pour $m\neq k$.

Pour tout élément e de E, on pose $\hat{e} := (\hat{e}_{j,k})_{(j,k)\in(J'\times K)}$.

Pour tout élément $u := (u_{j,k})_{(j,k)\in(J\times K)}$ de $\mathbb{N}^{(J\times K)}$, soit $(u+\delta_{i,h}) := u'$ l'élément $u' := (u'_{j,k})_{(j,k)\in(J\times K)}$ de $\mathbb{N}^{(J\times K)}$ défini par $u'_{i,h} := u_{i,h}+1$ et, pour $(|x-i|+|y-h|) \neq 0$, $u'_{x,y} := u_{x,y}$.

On définit de même $(u-\delta_{i,h})$.

Soit z un réel et $(x_{i,h})_{(i,h)\in(J'\times K)}$ une famille de réels positifs tels que $x^* := \sum_{i,h} x_{i,h} > 0$. Pour tout élément e de E, on pose :

$$e^* := \sum_{j,k} \hat{e}_{j,k} \quad \text{et} \quad \rho^*_{o,j,k}(e) := (x_{j,k}+z\,\hat{e}_{j,k})/(x^*+z\,e^*)$$

Soit E' une partie de E telle que, pour tout élément e' de E', on a $(x_{j,k}+z\,\hat{e}'_{j,k}) \geqslant 0$. Pour $z \geqslant 0$, on peut prendre E' = E .

On définit les routages r de la façon suivante :

a) Pour tout élément (e,e',h,k) de (E×E×K×K), on a $r_{o,o,h,k}(e,e') := 0$ et, quels que soient i et j éléments de J', $r_{i,j,h,k}(e,e') := 0$.

b) Pour tout élément (j,h,k,e) de (J'×K×K×E), on pose $r_{o,j,h,k}(e,e') := 0$ si $\hat{e}' \neq \hat{e}+\delta_{j,k}$ et $r_{o,j,h,k}(e,e') := \rho^*_{o,j,k}(e)$ si $\hat{e}' = \hat{e}+\delta_{j,k}$.

c) Pour tout élément (i,h,k,e) de (J'×K×K×E), on pose $r_{i,o,h,k}(e,e') := 0$ si $\hat{e}' \neq \hat{e}-\delta_{i,h}$ et $r_{i,o,h,k}(e,e') := (1/n)$ si $\hat{e}' = \hat{e}-\delta_{i,h}$.

Pour tout élément e de E', on pose :

$$f(e) := n^{e*} \{ \prod_{j<e*} (x^*+z\,j)^{-1}\} \{ \prod_{i\in J'} \prod_{h\in K} \{ \prod_{j<\hat{e}_{i,h}} (x_{i,h}+z\,j)\}\}$$

Si e appartient à E\E', on pose f(e) := 0 .

Enfin on suppose que, pour tout élément (e,e') de (E' × (E\E')),

$$r_{i,j,h,k}(e,e') = 0$$

(quels que soient i, j, h et k).

On vérifie alors que les conditions (v), (vi), (vii), (viii), (xi), (xii) et (xiii) du théorème fondamental sont satisfaites en prenant $b_{j,k}(e_j) = 1$ (quels que soient j, k et e_j). Le cas z = 0 correspond à des routages fixes. Par contre, si z ≠ 0, les routages dépendent profondément de l'état.

Vérification

1°) condition (v)

Si (e,e') appartient à F(o,j,h,k), $\hat{e}'_{j,k} = \hat{e}_{j,k} + 1$ et $\hat{e}'_{x,y} = \hat{e}_{x,y}$ pour $(|x-j|+|y-k|) \neq 0$; on a donc

$$r_{o,j,h,k}(e,e') = \rho^*_{o,j,h,k}(e)$$

ce qui implique (v) dans ce cas.

Cette condition (v) est évidente pour les quadruples (i,j,h,k) avec i = j = 0 et ceux tels que i et j appartiennent à J' (car r = 0).

Enfin si (e,e') appartient à F(i,o,h,k), $\hat{e}'_{i,h} = \hat{e}_{i,h} - 1$ et $\hat{e}'_{x,y} = \hat{e}_{x,y}$ pour $(|x-i|+|y-h|) \neq 0$; on a donc

$$r_{i,o,h,k}(e,e') = (1/n)$$

ce qui implique (v).

2°) condition (vi)

Comme au 1°), cette condition est trivialement satisfaite pour les quadruplets (i,j,h,k) avec i = j = 0 et ceux pour lesquels i et j appartiennent à J' (car r = 0).

Si (e',e) appartient à F(o,j,h,k), on a vu au 1°) que $r_{o,j,h,k}(e',e) = \rho^*_{o,j,h,k}(e')$ avec $\hat{e}' = \hat{e} - \delta_{j,k}$. Ceci et le fait que f(e') ne dépend de e' que par l'intermédiaire de $\hat{e}'$ (et donc de $\hat{e}$ pour j et k donnés) impliquent la condition (vi) dans ce cas.

Enfin, si (e',e) appartient à F(i,o,h,k), on a vu au 1°) que $r_{i,o,h,k}(e',e) = (1/n)$; ceci et le fait que $\hat{e}' = \hat{e} + \delta_{i,h}$ et que f(e') ne dépend que de $\hat{e}'$ impliquent la condition (vi).

3°) condition (vii)

Considérons d'abord le cas $i=0$; on se donne donc h élément de K et (e,u) élément de $F'(o,h)$. On a donc (cf. 1°)) :

$$\rho_{o,j,h,k}(e,u) = \rho^*_{o,j,h,k}(e)$$

La condition (vii) se déduit alors immédiatement de la définition de ρ^* et de $\rho_{o,o,h,k}(e,u) = 0$. Considérons maintenant le cas i élément de J' ; on se donne donc (i,h) élément de $(J' \times K)$ et (e,u) élément de $F'(i,h)$. On a alors (cf. 1°)) $\rho_{i,o,h,k}(e,u) = (1/n)$; par ailleurs $\rho_{i,j,h,k}(e,u) = 0$ pour $j \neq 0$. Ceci implique la propriété (vii).

4°) condition (viii) avec $b_{j,k}(e_j) = 1$

Considérons d'abord le cas $i=0$; on se donne donc (h,e) élément de $(K \times E)$. Soit (j,k) élément de $(J' \times K)$ et (e',e) élément de $F(j,o,k,h)$; on a :

$$\rho'_{j,o,k,h}(e'_j,e) = \frac{1}{n} f(e')$$

avec $\hat{e}' = \hat{e} + \delta_{j,k}$.

On a donc $\rho'_{j,o,k,h}(e'_j,e) = f(e) \dfrac{x_{j,k} + z\ \hat{e}_{j,k}}{x^* + z\ e^*}$

et $$\sum_{j,k} \rho'_{j,o,k,h}(e'_j,e) = f(e)$$

Considérons maintenant le cas i élément de J' ; on se donne donc (i,h,e) élément de $(J' \times K \times E)$. Si j appartient à J' , $\rho'_{j,i,k,h} = 0$. Considérons le cas $j=0$ et soit k élément de K et (e',e) élément de $F(o,i,k,h)$. On a :

$$\rho'_{o,i,k,h}(e'_o,e) = f(e')\ \rho^*_{o,i,k,h}(e')$$

avec $\hat{e}' = \hat{e} - \delta_{i,h}$.

On a donc :

$$\rho'_{o,i,k,h}(e'_o,e) = \frac{1}{n} f(e) \frac{x^* + z(e^* - 1)}{x_{i,h} + z(\hat{e}_{i,h} - 1)} \frac{x_{i,h} + z(\hat{e}_{i,h} - 1)}{x^* + z(e^* - 1)}$$

$$= \frac{1}{n}$$

ce qui implique (viii) dans ce cas.

2.3 - EXEMPLE 3

En utilisant la deuxième partie du théorème fondamental, il est possible de construire des couples (r,f) en "composant" les exemples 1 et 2 donnés ci-dessus.

A titre d'exemple, nous allons expliciter le cas où l'on construit un couple (r,f) à partir de couples comme ceux définis en 2.2 ci-dessus, mais ceci n'est qu'un exemple.

On considère toujours le cadre du théorème fondamental. De plus, on suppose que $J = J' \cup \{0\}$ (avec 0 non élement de J'), que $E_o := \{0\}$ et que, quel que soit h élément de K, $a_{o,h}(o,o) := d_{o,h}(o,o) := 1$. Pour tout élément j de J', on suppose qu'il existe une application définie sur E_j , à valeurs dans $\mathbb{N}^K$ qui, à e_j élément de E_j , associe $\hat{e}_j := (\hat{e}_{j,k})_{k\in K}$ élément de $\mathbb{N}^K$. Comme dans les exemples 1 et 2 on suppose que

$d_{j,k}(e_j,e'_j) + a_{j,k}(e'_j,e_j) \neq 0$ implique $e'_{j,k} = e_{j,k} - 1$ et, pour $m \neq k$, $\hat{e}'_{j,m} = \hat{e}_{j,m}$.

On se donne une partition $(J(i))_{i\in I}$ de J', deux familles de réels positifs $(x_{j,k})_{(j,k)\in(J\times K)}$ et $(y_{i,k})_{(i,k)\in(I\times K)}$, un réel w et une famille de réels $(z_i)_{i\in I}$. On suppose que, quel que soit i élément de I, $x^*_j := \sum_{j\in J(i)} \sum_{k\in K} x_{j,k} > 0$ et que $y^* := \sum_{i,k} y_{i,k} > 0$.

On définit $(u+\delta_{j,k})$ et $(u-\delta_{j,k})$ comme dans l'exemple 2 ci-dessus. Pour tout élément j de J on désigne par j* l'élément i de I tel que j appartient à J (j*).

Pour tout élément e de E, on pose :

$$e^* := \sum_{j,k} \hat{e}_{j,k} \quad ; \quad \overline{e}_{i,k} := \sum_{j\in J(i)} \hat{e}_{j,k} \quad ; \quad \tilde{e}_i := \sum_{k\in K} \overline{e}_{i,k} = \sum_{k\in K} \sum_{j\in J(i)} \hat{e}_{j,k}$$

$$\rho^*_{o,j,k}(e) := (x_{j,k} + z_{j*}\,\hat{e}_{j,k})(y_{j*,k} + w\,\overline{e}_{j*,k})/(x^*_{j*} + z_{j*}\,\tilde{e}_{j*})(y^* + w\,e^*)$$

Si e appartient à (E\E') on pose f(e) = 0 .

Si e appartient à E', on pose :

$$f(e) := n^{e^*} \{ \prod_{j \in J'} \prod_{k \in K} \{ \prod_{m < \hat{e}_{j,k}} (x_{j,k} + z_{j*}\, m)\} \{ \prod_{i \in I} \prod_{k \in K} \{ \prod_{m < \bar{e}_{i,k}} (y_{i,k} + w\, m)\} /$$

$$\{ \prod_{i \in I} \{ \prod_{m < \tilde{e}_i} (x_i^* + z_i\, m)\} \{ \prod_{m < e^*} (y^* + w\, m) \}$$

Enfin les routages sont définis comme dans l'exemple 2 du paragraphe 2.2 qui précède. On vérifie exactement de la même façon que (v), (vi), (vii), (viii), (xi), (xii) et (xiii) du théorème fondamental sont satisfaites.

3 - RESEAU DE FILES D'ATTENTE

L'exemple de base associé au théorème fondamental est celui d'un réseau de files d'attente dont on étudie la probabilité stationnaire et qui se compose d'un ensemble $(R_j)_{j\in J}$ de sous-réseaux.

Chaque sous-réseau R_j comprend une ou plusieurs stations ; entre les diverses stations évoluent des clients qui peuvent appartenir à plusieurs classes : plus précisément , K désigne l'ensemble des classes de clients.

Suivant les cas, l'évolution d'une station, et donc d'un sous-réseau peut, ou non, dépendre de la classe des clients concernés et (ou) de leur ordre d'arrivée dans la station. Dans tous les cas, on suppose que l'ensemble des états est suffisamment "riche" pour que, relativement à cet ensemble d'états, le réseau évolue de façon markovienne homogène.

Chaque sous-réseau peut être considéré comme "ouvert" au sens indiqué plus loin ; le réseau global peut être ouvert ou fermé. On adopte les conventions usuelles : notamment les clients se déplacent un à un et la probabilité d'occurence de deux évènements entre t et (t+dt) est un "infiniment petit" par rapport à dt.

Pour chaque sous-réseau R_j , E_j est l'ensemble des états possibles de ce sous-réseau. On suppose que chaque sous-réseau R_j est "propre" (cf. [Pel-1]) c'est à dire que l'évolution "interne" de ce sous-réseau ne dépend que de l'état e_j du sous-réseau. Plus précisément, les fonctions p_j , t_j , $d_{j,k}$ et $a_{j,k}$ peuvent être interprétées de la façon suivante :

- on suppose que le sous-réseau R_j est soumis, pour chaque classe de clients, à un flot d'entrée poissonnien de paramètre 1.

Pour tout élément (u,v) de $(E_j \times E_j)$, c'est à dire pour tout couple (u,v) d'états "possibles" du sous-réseau R_j , considérons les évènements suivants :

$T_j(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$ est l'"évènement" "R_j est dans l'état v à (t +dt) sachant qu'il était dans l'état u à t et le passage de u à v correspond au transfert d'un client à l'intérieur de R_j (avec ou sans changement de classe)".

$A_{j,k}(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$ (resp. $D_{j,k}(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$) est l'"évènement" "$R_j$ est dans l'état v à (t + dt) sachant qu'il était dans l'état u à t et le passage de u à v correspond à l'arrivée (resp. au départ) d'un client de classe k dans (resp. de) R_j".

$G_{j,k}$(v à t+dt | u à t) est l'"évènement" "R_j est dans l'état v à (t+dt) sachant qu'il était dans l'état u à t".

On a alors :

$$t_j(u,v) \quad := \quad \lim_{dt\downarrow o} . \text{ Proba } T_j(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$$

$$a_{j,k}(u,v) \quad := \quad \lim_{dt\downarrow o} . \text{ Proba } A_{j,k}(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$$

$$d_{j,k}(u,v) \quad := \quad \lim_{dt\downarrow o} . \text{ Proba } D_{j,k}(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$$

$$g_j(u,v) \quad := \quad \lim_{dt\downarrow o} . \text{ Proba } G_j(v \text{ à } t+dt \mid u \text{ à } t)$$

g_j caractérise le générateur infinitésimal.

La condition $(i)_j$ signifie que, pour chaque classe de clients, le flot d'arrivée est poissonnien et de paramètre 1. Les conditions $(ii)_j$ peuvent être considérées comme des définitions de $b_{j,k}$. La condition $(iii)_j$ signifie que p_j satisfait aux conditions d'équilibre d'une probabilité stationnaire ; plus précisément , si le système ici considéré est ergodique et si $\sum_{u\in E(j)} p_j(u) = 1$, alors p_j est la probabilité stationnaire de ce système.

Enfin, la condition (ix) est une condition de "balance locale" relativement à "l'extérieur de R_j" : autrement dit, on suppose que R_j est un sous-réseau échangeable comme défini en [Pel-1].

Notons que, jusqu'ici, on n'a pas introduit d'hypothèse de "balance locale par classes". Toutefois, pour la plupart des applications, on a $b_{j,k}(u) = 1$ (quels que soient j, k et u), c'est à dire que la condition $(ii)_j$ devient une condition d'"échangeabilité par classe" (cf. [Len]).

<u>La composition des divers sous-réseaux</u> s'effectue de la façon suivante : on ne soumet plus les sous-réseaux à un flot d'entrée poissonnien mais on les relie entre eux suivant des "routages" $r_{...}$

On suppose qu'un état e du réseau global R est caractérisé par les états $(e_j)_{j\in J}$ de chacun des sous-réseaux R_j.

Puisqu'il ne s'agit que d'un exemple, nous allons nous limiter à un cas, déjà très général, où les "routages" entre sous-réseaux ne dépendent que du nombre de clients de chaque classe dans chaque sous-réseau. L'exemple 1 donné en 3-4 rentre dans ce cadre.

Si le réseau <u>global R est fermé</u>, pour chaque état e_j de R_j , soit $\hat{e}_j := (\hat{e}_{j,k})_{k\in K}$ le vecteur où, quel que soit k, $\hat{e}_{j,k}$ désigne le nombre (fini) de clients de classe k dans le sous-réseau R_j (quand celui-ci est dans l'état e_j).

Si le réseau <u>global R est ouvert</u>, on suppose que $J := J' \cup \{\infty\}$; pour tout élément j de J', on définit $\hat{e}_j$ et $\hat{e}_{j,k}$ comme ci-dessus (et on suppose $\hat{e}_{j,k} < +\infty$) ; par contre, l'indice ∞ correspond à l'"extérieur" et on suppose que les probabilités considérées ne chargent que les états e pour lesquels on a :

$$\hat{e}_{\infty,k} := - \sum_{j\in J'} \hat{e}_{j,k}$$

$$e_\infty := \hat{e}_\infty := (\hat{e}_{\infty,k})_{k\in K}$$

soit $E_\infty \subset \mathbb{Z}^K$

Dans les deux cas (R ouvert ou fermé), on pose $\hat{e} := (\hat{e}_j)_{j\in J}$.

On suppose que f et $r_{...}$ ne dépendent que de $\hat{e}$. Plus précisément, pour tout couple d'états (e,e'), on suppose que f(e) ne dépend que de $\hat{e}$, qu'elle satisfait à (iv) et que $r_{i,j,h,k}(e,e')$ ne dépend que de $(i,j,h,k,\hat{e})$ au sens suivant :

$$\text{si} \quad \hat{e}'_{i,h} = \hat{e}_{i,h} - 1 \quad , \quad \hat{e}'_{j,k} = \hat{e}_{j,k} + 1 \quad \text{et} \quad \hat{e}'_{x,y} = \hat{e}_{x,y}$$

pour $(|x-i|+|y-h|)\,(|x-j|+|y-k|) \neq 0$, alors on suppose qu'on a

$$\hat{\rho}_{i,j,h,k}(\hat{e}) := r_{i,j,h,k}(e,e') \; .$$

Dans les autres cas, on suppose que $r_{i,j,h,k}(e,e') = 0$.

Les conditions (v) et (vi) sont alors satisfaites. Notons que, dans le cas d'un réseau ouvert, on aurait pu prendre E_∞ réduit à un point mais il faudrait, ici, définir différemment les routages (cf. exemple 2 donné en 2.2). La condition (viii) peut être considérée comme une définition de f, quand cette fonction f existe.

Plus précisément, cette condition (viii) peut être interprétée de la façon suivante dans le cas $b_{j,k}(e_j) = 1$ (quels que soient j, k et e_j).

Considérons un réseau $\hat{R}$ constitué de stations $(S_j)_{j\in J}$, l'état de S_j (pour tout j) étant caractérisé par $\hat{e}_j$; on suppose que le taux de service vaut 1 dans chaque station et pour chaque classe de clients. On suppose que les routages sont ceux étudiés précédemment (ne dépendant donc que de $\hat{e}$).

Soit f une probabilité stationnaire de $\hat{R}$; la condition (viii) signifie alors que f satisfait à une propriété de "balance locale par classe" pour chaque station. Un cas particulier de cette situation est celui où les routages sont fixes (exemple 1 donné en 2.1).

Les échanges entre les sous-réseaux s'effectuent alors de la façon suivante : un client de classe h qui quitte le sous-réseau R_i, l'état global du réseau R étant e (juste avant la fin du service du-dit client), va dans le sous-réseau R_j où il entre en étant de classe k avec la probabilité $\hat{\rho}_{i,j,h,k}(\hat{e})$.

Avec cette interprétation, la condition (vii) est une condition normale pour des routages. La propriété (x) (la conclusion) signifie que la fonction p (qui satisfait, par définition, à une "sorte de forme produit") remplit les conditions d'équilibre d'une probabilité stationnaire. Notamment, si le système global R est ergodique, p est la probabilité stationnaire à une constante multiplicative près.

Avant de terminer ce paragraphe, rappelons qu'il s'agit d'un exemple pour lequel on n'a pas cherché à donner la situation la plus générale. Notamment l'exemple 2 donné au paragraphe 2.2 ne rentre pas dans le cadre considéré ici. De même, contrairement au théorème fondamental, ce cadre ne prend pas en compte le cas où certains sous-réseaux R_j sont ouverts pour certaines classes de clients et fermés pour d'autres.

Par contre, le cadre considéré dans ce paragraphe contient le théorème B.C.M.P. puisqu'il contient le cas des réseaux ouverts ou fermés à routages fixes (exemple 1 du paragraphe 2) ; les divers exemples classiques de sous-réseaux réduits à une station seront considérés au paragraphe 4 qui suit.

4 - EXEMPLES DE SOUS-RESEAUX ECHANGEABLES PAR CLASSES

4.1 - INTRODUCTION

Pour ce paragraphe 4, on considère le cadre formel du théorème fondamental mais avec l'interprétation "physique" et la nomenclature liées aux réseaux de files d'attente.

Plus précisément, on va donner quelques exemples de sous-réseaux R_j tels que ceux considérés dans le théorème fondamental.

4.2 - DEFINITION

On considère le cadre du théorème fondamental. Soit j un élément de J et R_j le sous-réseau de files d'attente associé. On dira que ce sous-réseau est "échangeable" par classe si, quel que soit k élément de K, $b_{j,k} = 1$ et si les conditions $(i)_j$, $(ii)_j$ et $(iii)_j$ sont satisfaites.

Cette notion généralise la notion de sous-réseau standard introduite dans [Pel-1] et de station échangeable par classes définie en [Len]. Elle correspond à une propriété de balance locale par classes relativement à l'extérieur du réseau : ceci est beaucoup moins restrictif que de supposer qu'il y a balance locale pour chaque station.

Les exemples fondamentaux de sous-réseaux échangeables par classe sont donnés par la deuxième partie du théorème fondamental ; toutefois, pour pouvoir utiliser ce théorème, il faut d'abord disposer d'exemples élémentaires de sous-réseaux échangeables par classe.

4.3 - STATION CLASSIQUE

1°) Rappelons qu'on est toujours dans le cadre du théorème fondamental et qu'on considère un élément j de J et le sous-réseau associé.
Formellement, on suppose que $E_j := \mathbb{N}^K$ et $t_j = 0$. Pour tout élément $u := (u_k)_{k \in K}$ de E_j, on désigne par $(u + \delta_{j,k})$ l'élément v de E_j défini par $v_k := u_k + 1$ et, pour $h \neq k$, $v_h := u_h$. On définit de même $u - \delta_{j,k}$.

On suppose que

$$a_{j,k}(e,e') = 1 \quad \text{si} \quad e' = e + \delta_{j,k}$$

$$a_{j,k}(e,e') = 0 \quad \text{si} \quad e' \neq e + \delta_{j,k}$$

$$b_{j,k}(u) \quad = 1 \quad \text{quels que soient } u \text{ et } k$$

$$d_{j,k}(e',e) = 0 \quad \text{si} \quad e' \neq e + \delta_{j,k}$$

On pose $d_k^*(u) = d_{j,k}(u, u - \delta_{j,k})$ si $u_k \neq 0$ et $d_k^*(u) := 0$ si $u_k = 0$.

Enfin, on suppose que la condition $(ii)_j$ est satisfaite, c'est à dire que, quel que soit (e_j, k) élément de $(E_j \times K)$, on a

$$p_j(e_j + \delta_{j,k}) \, d_{j,k}(e_j + \delta_{j,k}, e_j) = p_j(e_j)$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$(ii)^* \qquad p_j(u) \, d_k^*(u) = p_j(u - \delta_{j,k}) \quad \text{si} \quad u_k \neq 0 \quad .$$

On vérifie alors facilement que les conditions $(i)_j$, $(ii)_j$ et $(iii)_j$ sont satisfaites. Le sous-réseau R_j est donc échangeable par classe.

2°) Le cas particulier le plus fréquemment utilisé dans les applications consiste à prendre :

$$d_k^*(u) = h_k(u_k) \qquad \text{et}$$

$$p_j(u) = 1 / \{ \prod_{k \in K} \prod_{i \leq u(k)} h_k(i) \}$$

où les fonctions h_k sont des fonctions strictement positives sur $\mathbb{N}^+$ et $h_k(o) = 0$.

Physiquement, u_k correspond au nombre de clients dans la station quand l'état est u ; supposer que $d_k^*(u) = h_k(u_k)$ signifie que le taux de service d'un client de classe k ne dépend que du nombre total de clients de classe k présents dans la station.

3°) La situation considérée au 2°) peut être généralisée de la façon suivante :

Soit $(K(i))_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de K et $(h_i)_{i\in I}$ une famille associée de fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et strictement positives sur $\mathbb{N}^+$; quel que soit i élément de I, on suppose que $h_i(o) = 0$.
Pour tout élément $u := (u_k)_{k\in K}$ de $\mathbb{N}^K$, on pose $u_i^* := \sum_{k\in K(i)} u_k$.
Pour tout élément k de K, soit H(k) l'ensemble des éléments i de I tels que k appartient à K(i).

On suppose que :

$$d_k^*(u) := \prod_{i\in H(k)} h_i(u_i^*) \quad \text{et}$$

$$p_j(u) := 1 / \{ \prod_{i\in I} \prod_{x\leq u_i^*} h_i(x)\}$$

On vérifie alors que la condition $(ii)^*$ est satisfaite.

On peut, évidemment, envisager d'autres généralisations.

4.4 - DERNIER ARRIVE, PREMIER SERVI

On est toujours dans le cadre du théorème fondamental ; on considère un élément j de J et le sous-réseau R_j associé.

Formellement, un état u de E_j est la donnée d'un entier n(u), positif ou nul, et, si n(u) > 0, d'un n(u)-uplet $(u_1, \dots u_{n(u)})$ avec, quel que soit x, $1 \leq x \leq n(u)$, u_x élément de K. Physiquement, n(u) est le nombre total de clients dans la station et u_x est la classe du client arrivé en $x^{\text{ième}}$ position.

On suppose que :

$$a_{j,k}(e,e') = 1 \text{ si } n(e_j') = 1 + n(e_j) \quad \text{et}$$

$$e_j' = (e_j , k)$$

et $a_{j,k}(e,e') = 0$ dans les autres cas.

$$d_{j,k}(e,e') = \mu(k) \text{ si } n(e_j) = 1 + n(e_j') \quad \text{et}$$

$$e_j = (e_j' , k)$$

$$d_{j,k}(e,e') = 0 \text{ dans les autres cas}$$

où $(\mu(k))_{k\in K}$ est une famille de réels strictement positifs.

Physiquement, ceci revient à dire que seul le dernier client arrivé peut être servi et qu'il l'est avec un taux de service $\mu(k)$ si ce client est de classe k (la loi de service étant toujours la loi exponentielle).

Enfin on pose :

$$p_j(u) := 1 / \{ \prod_{x=1}^{n(u)} \mu(u_x) \}$$

On vérifie facilement que le sous-réseau R_j ainsi défini est échangeable par classe.

4.5 - LOIS NON EXPONENTIELLES

1°) Jusqu'ici, quand on a donné des interprétations "physiques", on a toujours supposé que les lois étaient exponentielles. Quand les lois de service ne sont pas exponentielles, on se ramène à des lois exponentielles en "grossissant" l'ensemble des états. On peut, par exemple, considérer des réseaux de Cox (cf. [Cox]). En fait, il est en général plus commode techniquement de ne pas se limiter à ce type de réseau (cf. [MaP]) : pour s'en convaincre, il suffit de considérer une loi de service qui admet comme densité de probabilité $\frac{1}{2}(f+g)$ où f est la densité de probabilité d'une loi exponentielle et g la densité de probabilité d'une loi Erlang 10 (proche de la loi constante) ; une approximation raisonnable d'une telle loi par un réseau de Cox nécessite une centaine d'états fictifs alors que la décomposition naturelle n'en nécessite que onze.

2°) Pour faciliter les explications, nous allons nous limiter au cas où card(K) = 1 (il n'y a qu'une seule classe de clients). L'extension de ce qui suit au cas de plusieurs clients est lourde à formaliser mais facile à comprendre.

On considère donc une station R_j pour laquelle tout se passe comme s'il n'y avait qu'une seule classe de clients. Pour alléger la présentation, nous allons supposer qu'il y a une infinité de serveurs dont la loi de service peut être modélisée par un sous-réseau R' (ceci n'est pas une restriction au niveau des applications) ; dans ce sous-réseau R', les routages sont fixes.

On peut donc, pour ce sous-réseau R', utiliser la deuxième partie du théorème fondamental (cf. § 2), c'est à dire que R' est échangeable. La station R_j peut alors être considérée comme un ensemble fini (cf. exemple 2.2 avec $Z = -1$ et, quel que soit i, $x_i = 1$), ou infini de stations telles que R' ; elle est donc elle-même échangeable.

Il est bien connu (théorème B.C.M.P.) que, si les routages sont fixes, la probabilité stationnaire a une forme produit quand certaines des stations ont des lois de service non exponentielles, une infinité de serveurs (ou "temps partagé") toutes les classes de clients étant servies de la même façon. Ce qui précède généralise ce résultat au cas des réseaux à routages pouvant dépendre de l'état.

5 - RESEAUX AVEC BLOCAGE

5.1 - CAS "INTUITIVEMENT TRIVIAUX"

Il y a quelques cas où le blocage en une ou plusieurs stations s'étudie facilement.

Considérons un réseau R dont on sache calculer la probabilité stationnaire quand toutes les stations ont une capacité infinie, les taux de service d'une station pouvant dépendre du nombre de clients dans la station considérée. Par exemple, considérons le cas où R satisfait à la "forme produit classique" .

Considérons maintenant un réseau R' identique à R sauf que l'on introduit des limitations de capacité, pour une ou plusieurs classes de clients et pour une ou plusieurs stations. Considérons les deux politiques suivantes :

a) (politique optimiste) quand la station est saturée (pour une ou plusieurs classes de clients) elle devient "transparente", c'est à dire qu'un nouveau client d'une classe saturée est immédiatement servi.

b) (politique pessimiste) quand la station est saturée, tout le reste du réseau bloque son service pour les clients des classes concernées.

Il est facile de voir que la probabilité stationnaire est la même dans les deux cas : par contre, évidemment, les délais de service sont beaucoup plus longs dans le cas b).

Or, la probabilité stationnaire dans le cas a) correspond au cas de taux de service "infinis" pour les situations de blocage ; en général, cette probabilité sera donc la limite de probabilités pour des réseaux sans saturation quand on fait tendre certains taux de service vers l'infini. Notamment, en général, ce passage à la limite n'altère pas la propriété classique de forme produit. Pour une étude plus systématique et rigoureuse, cf. [Len] .

L'intérêt des politiques a) et b) introduites ci-dessus est de donner une borne supérieure et une borne inférieure des délais de service.

5.2 - CAS DIT "REVERSIBLE"

Nous allons maintenant étudier, avec le formalisme introduit précédemment, un cas où on a la forme produit avec blocage (cf. [Pit]). Disons tout de suite qu'il s'agit d'une situation tout à fait exceptionnelle.

On se place dans la situation du théorème fondamental. On suppose donc que toutes les hypothèses de ce théorème sont satisfaites. On suppose, de plus, qu'on a les propriétés qui suivent :

Pour tout élément j de J, soit $E'_j \subset E_j$ (on peut avoir $E'_j = E_j$ pour certaines valeurs de j) et on pose $E''_j := E_j \setminus E'_j$.

a) On suppose que, pour tout élément (j,e_j) de $(J \times E'_j)$, il existe une partie $K(j,e_j)$ de K telle que,
si $a_{j,h}(e_j,v) + d_{j,h}(v,e_j) \neq 0$, alors v appartient à E''_j si et seulement si h appartient à $K(j,e_j)$.

b) Par ailleurs, on suppose que $t_j(u,v) \neq 0$ implique "(u,v) élément de $(E'_j \times E'_j)$ ou (u,v) élément de $(E''_j \times E''_j)$".

c) De façon analogue, on suppose que $\sum_h d_{j,h}(u,v) + a_{j,h}(v,u) \neq 0$ et u élément de E'_j implique v élément de E'_j .

Pour tout élément (j,h,e) de $(J\times K\times E)$, on pose :

$$\xi(i,h,e) := p(e) \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} d_{j,k}(e_j,v)\, a_{i,h}(e_i,u)\, r_{i,j,h,k}[e,e'(u,v)]$$

où $e' := e'(u,v)$ est défini par $e'_i := u$, $e'_j := v$ et, pour $(x-i)(x-j) \neq 0$
$e'_x := e_x$

$$\xi'(i,h,e) := \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} d_{i,h}(u,e_i) r_{i,j,h,k}[e'(u,v),e]\, p[e'(u,v)]\, a_{j,k}(v,e_j)$$

avec $e'(u,v)$ défini comme ci-dessus.

On suppose que, pour tout élément (e,j,h) de $(E'\times J\times K(j,e_j))$, on a :

(r) $\xi(j,h,e) = \xi'(j,h,e)$

On pose $E' := \prod_{i \in J} E'_i$ (produit ensembliste)

et $E'' := E \setminus E'$.

Pour tout couple (e,e') d'éléments de E, on pose

$$g'(e,e') := g(e,e')\, 1_{E'}(e')$$

et $$p'(e) := p(e)\, 1_{E'}(e)$$

On a alors :

(x)' quel que soit e élément de E

$$p'(e) \sum_{w \in E} g'(e,w) = \sum_{w \in E} p'(w)\, g'(w,e)$$

PREUVE :

Si e n'appartient pas à E', $p'(e) = 0$ et $g'(w,e) = 0$ (quel que soit w) par définitions de p' et de g'. La relation (x)' est donc triviale dans ce cas.

On suppose donc, désormais, que e est un élément fixé de E'. On pose

$$\gamma_1 := p(e) \sum_{w \in E} g(e,w)$$

$$\gamma'_1 := p'(e) \sum_{w \in E} g'(e,w)$$

$$\gamma_2 := \sum_{w \in E} p(w)\, g(w,e)$$

$$\gamma'_2 := \sum_{w \in E} p'(w)\, g'(w,e)$$

On sait que $\gamma_1 = \gamma_2$; il faut donc prouver que $\gamma_1 - \gamma'_1 = \gamma_2 - \gamma'_2$.

D'autre part, $\gamma_1 - \gamma'_1$ est une somme de termes de la forme

$$p(e)\, a_{i,h}(e_i,u)\, d_{j,k}(e_j,v)\, r_{i,j,h,k}\left[e,e'(u,v)\right]$$

avec $e' := e'(u,v)$ défini par $e'_i := u$, $e'_j := v$

et, pour $(x-i)(x-j) \neq 0$, $e'_x := e_x$.

Or de tels termes (non nuls) n'apparaissent dans la somme associée à $\gamma_1 - \gamma_1'$ que si $a_{i,h}(e_i,u) \neq 0$ et si u n'appartient pas à E_i' (puisque v appartient à E_j' si $d_{j,k}(e_j,v) \neq 0$). Ceci implique que h appartient à $K(i,e_i)$. Réciproquement, si h appartient à $K(i,e_i)$, le terme correspondant apparait dans la somme associée à $\gamma_1 - \gamma_1'$. On a donc :

$$\gamma_1 - \gamma_1' = p(e) \sum_{i\in J} \sum_{h\in K(i,e(i))} \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} a_{i,h}(e_i,u)\, d_{j,k}(e_j,v)\, r_{i,j,h,k}[e,e'(u,v)]$$

D'autre part, $\gamma_2 - \gamma_2'$ est une somme de termes de la forme

$$d_{i,h}(u,e_i)\, a_{j,k}(v,e_j)\, p[e'(u,v)]\, r_{i,j,h,k}[e'(u,v),e]$$

où $e'(u,v)$ est défini comme plus haut.

Un tel terme n'apparait dans la somme associée à $\gamma_2 - \gamma_2'$ que si $e'(u,v)$ n'appartient pas à E' ; or $a_{j,k}(v,e_j) \neq 0$ implique que v appartient à E_j' ; u ne doit donc pas appartenir à E_i', c'est à dire que h appartient à $K(i,E_i)$. Réciproquement, si h appartient à $K(i,e_i)$, et si le terme ci-dessus n'est pas nul, u n'appartient pas à E_i' et le terme ci-dessus apparait dans la somme associée à $\gamma_2 - \gamma_2'$.

On a donc :

$$\gamma_2 - \gamma_2' = \sum_{i\in J} \sum_{h\in K(i,e(i))} \sum_{j\in J} \sum_{k\in K} \sum_{u\in E(i)} \sum_{v\in E(j)} d_{i,h}(u,e_i)\, a_{j,k}(v,e_j)\, p[e'(u,v)]\, r_{i,j,h,k}[e'(u,v),e]$$

la relation (r) implique alors $\gamma_1 - \gamma_1' = \gamma_2 - \gamma_2'$ par sommation sur i dans J et sur h dans $K(i,e_i)$.

5.3 - REMARQUES

1°) Dans le cadre de l'exemple de base, on utilise usuellement la proposition qui précède de la façon suivante :

Soit I' l'ensemble des indices i pour lesquels E_i' est différent de E_i ;

ce sont ceux des stations pour lesquelles il y a blocage. Pour ces indices, on suppose que $E_i = \mathbb{N}^K$; si $u := (u_k)_{k\in K}$ est un élément de E_i, u_k est le nombre de clients de classes k dans E_i. On suppose qu'on a la propriété d) qui suit :

d) E_i' est une partie de E_i telle que, si $u := (u_k)_{k\in K}$ appartient à E_i', si $v := (v_k)_{k\in K}$ appartient à E_i et si, quel que soit k, $v_k \leqslant u_k$, alors v appartient à E_i'.

Ceci correspond à la condition c). On notera que cette condition, très simple, est plus générale que la condition usuelle consistant à imposer des contraintes affines. Celles-ci impliquent une propriété de convexité parfaitement inutile.

Par ailleurs, pour tout élément $e_i := (e_{i,k})_{k\in K}$ de E_i avec i élément de I', soit $(e_i + \delta_{i,h}) := v$ l'élément de E_i défini par $v_h := e_{i,h} + 1$, et, si $k \neq h$, $v_k := e_{i,k}$. Soit alors $K(i,e_i)$ l'ensemble des éléments h de K tels que $(e_i + \delta_{i,h})$ appartienne à E_i''. On vérifie immédiatement que la condition a) est satisfaite : dans ce cas, cette condition se simplifie car, h et e_i étant donnés, il existe un seul élément u de E_i tel que $a_{i,h}(e_i,u) + d_{i,h}(v,e_i) \neq 0$.

Enfin, la condition b) est satisfaite si on suppose que $t_i = 0$ pour tout élément i de I'. (Cas d'un sous-réseau réduit à une station).

Dans le cadre usuel, la condition d) implique donc les conditions a), b) et c).

2°) Toujours dans le cadre usuel, la condition restrictive est donc la condition (r). En simplifiant, elle revient à peu près à dire que, si on inverse le temps (réversibilité), la probabilité stationnaire reste la même <u>et</u> il y a encore "balance locale" pour les stations susceptibles de connaître un blocage.

5.4 - BLOCAGE REGULE

Nous allons maintenant donner un exemple où il peut y avoir blocage dans certaines stations sans que ceci ne bloque l'ensemble du réseau et tout en gardant la forme produit au sens du "théorème fondamental" de ce papier.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'exemple 2 donné au paragraphe 2.2 ci-dessus. De plus, on suppose que $z < 0$ et que, quels que soient j et k, $y_{j,k} := (x_{j,k}/|z|)$ est un entier ; E' est l'ensemble des éléments e' de E tels que, quels que soient j et k, $0 \leqslant e'_{j,k} \leqslant y_{j,k}$.

Physiquement cela revient à dire que, dans le sous-réseau R_j il y a $y_{j,k}$ places pour des clients de classe k ; quand un client de classe k rentre dans le système global, la probabilité (le routage) pour aller dans le sous-réseau R_j est égal au rapport entre le nombre de places disponibles en R_j et le nombre total de places restant disponibles dans le système global. Ce client est bloqué à l'extérieur quand le système global est saturé (en ce qui concerne les clients de classe k).

Ce système nous semble intéressant à deux points de vue. D'une part il est physiquement raisonnable, surtout s'il s'agit de la maintenance d'un parc de matériels qu'on peut faire réparer en diverses stations R_j. D'autre part, même si la situation physique concrète ne correspond pas aux hypothèses données ci-dessus, tout du moins ces hypothèses sont associées à une politique intermédiaire entre les politiques a) et b) du paragraphe 5.1 ci-dessus.

Cet exemple de "blocage modulé" généralise un exemple donné en [GLP] et repris dans [Len] quand il y a plusieurs classes de clients.

6 - CONCLUSION

Le théorème donné au paragraphe 1 est donc une généralisation de la quasi-totalité des résultats liés à la forme produit dans les réseaux de files d'attente.

Un point important - et presque surprenant - est que ce théorème repose essentiellement sur une sorte de "décomposition" du générateur infinitésimal : on peut donc espérer que cette décomposition se retrouve dans des exemples autres que celui d'un réseau de files d'attente. A ce sujet, cf. [Cou] et [Kel] dans le cas réversible.

Un autre point important est le caractère itératif de ce théorème. Cet aspect avait été mis en évidence dans [Pel] et repris dans [Len]. Il semble qu'il n'ait pas été noté par les autres auteurs.

L'exemple donné en 2.2 est profondément nouveau. Au niveau des applications, par itération, on peut composer des réseaux dans lesquels se mélangent des routages fixes, des routages comme ceux donnés en 2.2, des routages "réversibles", etc... Pour pouvoir effectuer de telles compositions, il n'est pas nécessaire d'avoir balance locale dans chaque station : il suffit d'avoir balance locale (ou balance locale par classe) pour les noeuds associés à la décomposition du réseau (cf. §1)

REFERENCES

[BCMP] BASKETT F., CHANDY K.M., MUNTZ R. a,d PALACIOS J., *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers,* J.A.C.M., n° 22, 248-260, 1975.

[Bre] BREMAUD J., *Point processes and queues,* Springer Verlag, 1981.

[CHT] CHANDY K.M., HOWARD J.M. and TOWSLEY D.F., *Product form and local balance in queueing networks,* J.A.C.M., n° 24, 250-263, 1977.

[Cou] COURTOIS P.J., *Decomposibility : queueing and computer system applications,* Academic Press, 1977.

[GeP] GELENBE E. et PUJOLLE , *Introduction aux réseaux de files d'attente,* Eyrolles, 1982.

[GlP] GLORENNEC P.Y. et PELLAUMAIL J., *Sur une extension de la formule de Jackson donnant les probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente,* Séminaire de Rennes, 1975.

[Jac] JACKSON J.R., *Jobshop-like queueing system,* Mgnt. Sci., n° 10, 131-142, 1963.

[Kel] KELLY F.P., *Reversibility and stochastic networks,* John Wiley, 1979.

[Kle] KLEINROCK L., *Queuing systems,* Vol. 1 and 2, John Wiley, 1976.

[Len] LE NY, *Etude analytique de réseaux de files d'attente multi-classes à routages variables,* RAIRO, vol. 14, n° 4, 331-347, 1980.

[MaP] MARIE R. and PELLAUMAIL J., *Steady-state probabilities for a queue with a general service distribution and state-dependent arrivals,* IEE, vol. SE-9, n° 1, 1983.

[Pel] PELLAUMAIL J., *Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente,* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 15, n° 3, 261-286, 1979.

[Pit] PITTEL B., *Closed exponential networks of queues with blocking*, IBM research report, RC7174, 1983.

[Nev] NEVEU J., *Processus ponctuels*, Lecture Notes n° 598, Springer Verlag, 1977.

PI 208 Problèmes d'implémentation du langage Prolog en vue de la réalisation d'une machine Prolog
Yves BEKKERS, Bernard CANET, Olivier RIDOUX, Lucien UNGARO
Octobre 1983, 63 pages.

PI 209 La technique du suivi de contour en synthèse d'images et ses applications
Gérard HEGRON, Octobre 1983.

PI 210 A new characterization of infinitary rational languages
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 9 pages.

PI 211 On the observational semantics of fair parallelism
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 40 pages.

PI 212 Solution à forme produit d'un système linéaire
J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 36 pages.

PI 213 Equations de Chapman-Kolmogorov et flots stationnaires pour des processus markoviens
J.Y. LE BOUDEC et J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 18 pages.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique